Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажырылатын дифференциалдық теңдеулер. Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

8 тақырып. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажырылатын дифференциалдық теңдеулер.

1 мысал. Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

а) $y' = 2x \Rightarrow \int y'dx = \int 2xdx \Rightarrow$

$$y = x^2 + C \qquad (1)$$

(1) шешімі кез келген C тұрақтысына байланысты, яғни, C-ның әртүрлі мәнінде әртүрлі шешім аламыз.Енді C тұрақтысын анықтау үшін қосымша бір шарт (бастапқы шарт) берелік: $y(1) = 2$.

Онда осы бастапқы шартты (1)-ге қойсақ: $2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$ - дербес шешім.

б) $y'' = 2 \Rightarrow \int (y')'dx = \int 2dx \Rightarrow y' = 2x + C_1 \Rightarrow \int y'dx = \int (2x + C_1)dx \Rightarrow$

$$y = x^2 + C_1x + C_2 \text{ - жалпы шешім.} \qquad (2)$$

Екінші ретті (2) теңдеуі екі тұрақтыға байланысты C_1 және C_2 , оларды анықтау үшін екі шарт (бастапқы) қажет: $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Бұдан:

$$\begin{cases} y = x^2 + C_1x + C_2 \\ y' = 2x + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = C_2 \\ 2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 2x + 1 \text{- дербес шешім.}$$

Геометриялық тұрғыдан, (1) және (2) шешімдері – параболалар жиынтығы. Бастапқы шарт берілді деген: осы параболалар жиынтығынан мына шарттарды қанағаттандыратын параболаны табыңыз деген сөз:

а) $M(1;2)$ нүктесі арқылы өтетін;

б) $M(0;1)$ нүктесі арқылы өтетін және $x = 0$ нүктесінде жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффиценті $k = y'(0) = 2$ болатын.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер

2 мысал. $F(x, y) = \ln \frac{y}{x} - 5 + xy$ түрінде берілген айқын емес функция $(x + x^2y)y' = y - xy^2$ дифференциалдық теңдеуінің интегралы болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Айқын емес функцияны дифференциалдау ережесіне сәйкес:

$$y' = \frac{F'_x}{F'_e} = -(y - \frac{1}{x})/(x + \frac{1}{y}) = \frac{y}{x}\frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{y - xy^2}{x + x^2y}.$$

Табылған туындыны берілген дифференциалдық теңдеуге қоятын болсақ, тепе-теңдік аламыз.

Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

3- мысал. Теңдеуді шешіңіз:

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

Шешуі. Бұл айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеу. Екі жағын да, $x^2 - 1 \neq 0,\ y^2 - 1 \neq 0$ дей отырып, $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$ көбейтіндісіне бөлеміз.

Қарапайым дифференциалдық теңдеулер. Дифференциалдық теңдеулер. Жалпы және дербес шешім. Бірінші ретті теңдеулер және оларды интегралдау әдістері. Айнымалылары ажырылатын дифференциалдық теңдеулер. Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

$$\frac{x}{x^2-1}dx+\frac{y}{y^2-1}dy \Rightarrow \int\frac{x}{x^2-1}dx+\int\frac{y}{y^2-1}dy=C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right|=\frac{1}{2}\ln C \Rightarrow$$

$$(x^2-1)(y^2-1)=C \text{ - жалпы интеграл.}$$

Енді, $x^2-1=0$ және $y^2-1=0$ қарастыралық.

$x=\pm1$ және $y=\pm1$ шешімдері берілген дифференциалдық теңдеудің шешімдері болады, бірақ олар жалпы шешімнен $C=0$ болғанда шығады. Сонымен, ерекше шешім жоқ. Жауабы: $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

Е с к е р т у 2. (1) теңдеуінің дербес жағдайы:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot\varphi(y).$$

4 - мысал.

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2y'=e^x,$$

теңдеуінің $y(0)=1$ бастапқы шартын қанағаттандыратын дербес шешімін табыңыз.

►Берілген теңдеуді дитфференциалдық пішінде жазамыз:

$$\left(1+e^{2x}\right)y^2dy-e^xdx=0.$$

Енді айнымалыларын ажыратсақ:

$$y^2dy-\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=0.$$

Екі жағын да интегралдасақ:

$$\int y^2dy-\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\frac{C}{3},. \qquad \frac{y^3}{3}-arctge^x=\frac{C}{3},$$

$$y=\sqrt[3]{C+3arctge^x}.$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімін алдық.

Бастапқы шартты ескеріп, тұрақтының мәнін анықтаймыз:

$$1=\sqrt[3]{C+\frac{3}{4}\pi}, \qquad C=1-\frac{3}{4}\pi.$$

Сонымен, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y=\sqrt[3]{`1-\frac{3}{4}\pi+3arcte^x}\ .◄$$